Q²

Formule des compléments

L 107
L 235
L 236
L 239
L 245

Th : Soit $s \in \mathbb{C}$, $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$, on a : $\Gamma(s) \times \Gamma(1-s) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi s)}$.

Démonstration : ① On se ramène au calcul d'une intégrale à paramètre.

Soit $s \in]0,1[$, on a : $s, 1-s > 0$ donc $\int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt$ et $\int_0^\infty t^{-s} e^{-t} dt$ CVA

Ainsi, d'après le th de Fubini - Lebesgue :

$$\Gamma(s) \times \Gamma(1-s) = \left(\int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx\right) \times \left(\int_0^\infty y^{-s} e^{-y} dy\right) = \iint_{]0,\infty[^2} e^{-(x+y)} \left(\frac{x}{y}\right)^s \frac{1}{x} dx dy$$

On considère alors $\varphi : \begin{array}{l}]0,\infty[^2 \longrightarrow]0;\infty[^2 \\ (x,y) \longmapsto (x+y ; \frac{x}{y}) \end{array}$, φ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0;\infty[^2$

Mq φ est bijective : Soit $(u,v) \in]0;\infty[^2$, on cherche $(x,y) \in]0;\infty[^2$ tq $(u,v) = \varphi(x,y)$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} u = x+y \\ v = \frac{x}{y} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} u = (v+1)\,y \\ x = v\,y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \frac{uv}{1+v} \\ y = \frac{u}{1+v} \end{cases}.$$

De plus, φ^{-1} est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\infty[^2$ ainsi φ est un $\mathcal{C}^1$- difféomorphisme.

Par commodité, $\forall (x,y) \in]0,\infty[^2$, $D\varphi_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \end{pmatrix}$ d'où $|\det(D\varphi_{(x,y)})| = \dfrac{x+y}{y^2}$

D'après la formule de changement de variables :

$$\Gamma(s) \times \Gamma(1-s) = \iint_{]0,\infty[^2} e^{-(x+y)} \left(\frac{x}{y}\right)^s \frac{1}{x} dx dy = \iint_{]0,\infty[^2} e^{-u} v^s \frac{1+v}{uv} \cdot \frac{du dv}{|\det(D\varphi_{\varphi^{-1}(u,v)})|}$$

$$= \iint_{]0;\infty[^2} e^{-u} \cdot v^s \cdot \frac{1+v}{uv} \cdot \frac{u}{(1+v)^2} du dv$$

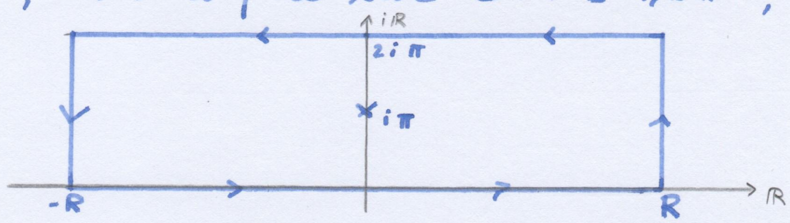
$$= \int_0^\infty e^{-u} du \times \int_0^\infty \frac{v^s}{1+v} \frac{dv}{v} = \int_0^\infty \frac{v^s}{1+v} \frac{dv}{v}$$

$$\underset{x = \ln(v)}{=} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{sx}}{1+e^x} dx$$

② Pour calculer cette intégrale, on utilise le th des résidus.

On considère $f : z \mapsto \dfrac{e^{sz}}{1+e^{z}}$, holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus(2\mathbb{Z}+1)i\pi$,

et $\forall R>0$, le chemin γ_R, $\mathcal{C}^1_{pm}$, défini ci-contre :



On a : $(z-i\pi)f(z) = e^{sz}\cdot\dfrac{z-i\pi}{e^{z}-e^{i\pi}} \xrightarrow[z\to i\pi]{} e^{s.i\pi}\cdot\dfrac{1}{e^{i\pi}} = -e^{i\pi s}$

Ainsi, d'après le th des résidus : $\forall R>0,\ \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = -2i\pi e^{i\pi s}$.

D'une part, $\left|\int_R^{R+2i\pi} f(z)\,dz\right| = \left|\int_0^{2\pi}\dfrac{e^{s(R+it)}}{1+e^{R+it}}\, i\,dt\right| \leqslant 2\pi . e^{(s-1)R} \underset{+\infty}{=} o(1)$

et de même, $\left|\int_{-R}^{-R+2i\pi} f(z)\,dz\right| = \left|\int_0^{2\pi}\dfrac{e^{s(-R+it)}}{1+e^{-R+it}}\, i\,dt\right| \leqslant 2\pi . e^{-sR} \underset{+\infty}{=} o(1)$

D'autre part, $\int_{R+2i\pi}^{-R+2i\pi} f(z)\,dz = -\int_{-R}^{R}\dfrac{e^{s(x+2i\pi)}}{1+e^{x+2i\pi}}\,dx = -e^{2i\pi s}.\int_{-R}^{R} f(z)\,dz$

D'où, à la limite qd $R\to\infty$: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \times \left(1-e^{2i\pi s}\right) = -2i\pi e^{i\pi s}$

puis : $\Gamma(s)\times\Gamma(1-s) = \dfrac{-2i\pi e^{i\pi s}}{1-e^{2i\pi s}} = \dfrac{2i\pi}{e^{i\pi s}-e^{-i\pi s}} = \dfrac{\pi}{\sin(\pi s)}$.

Enfin, les deux membres sont des fonctions holomorphes sur $0<\mathrm{Re}(s)<1$, qui coïncide sur $]0,1[$ possédant un point d'accumulation, par unicité du prolongement analytique, $\forall s\in\mathbb{C},\ 0<\mathrm{Re}(s)<1,\ \Gamma(s)\Gamma(1-s) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi s)}$

Corollaire 1 : Intégrale de Gauss : $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.

Corollaire 2 : Γ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$, qui ne s'y annule pas, admettant des pôles simples en $-n$, de résidu : $\dfrac{(-1)^n}{n!}$

Dém° : On a $\forall s\in\mathbb{C},\ 0<\mathrm{Re}(s)<1,\ \Gamma(s) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi s)\Gamma(1-s)} \neq 0$

Le membre de droite est holomorphe sur $\{z\in\mathbb{C} : \mathrm{Re}(z)<1,\ -z\notin\mathbb{N}\}$

Par unicité du prolongement analytique, Γ se prolonge sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$ avec cette expression et donc ne s'y annule pas.

Enfin, $\forall n\in\mathbb{N},\ (z-(-n))\Gamma(z) = \dfrac{\pi(z+n)}{\sin(\pi z)\Gamma(1-z)} = (-1)^n.\dfrac{\pi(z+n)}{\sin(\pi(z+n))\Gamma(1-z)} \xrightarrow[z\to -n]{} \dfrac{(-1)^n}{\Gamma(1+n)}$